ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті

Ақпараттық және теллекоммуникациялық технологиялар институты

Математатика кафедрасы

Жангарина Құралай

Кері есептердің кейбір мәселелері

ДИПЛОМДЫҚ ЖҰМЫС

5B070500 – Математикалық және компьютерлік модельдеу

Алматы 2019

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті

Ақпараттық және теллекоммуникациялық технологиялар институты

Математатика кафедрасы

ҚОРҒАУҒА ЖІБЕРІЛДІ

Кафедра меңгерушісі

ф.-м.ғ.к,доцент

__________Кельтенова Р.Т

«23» 05 2019 ж.

ДИПЛОМДЫҚ ЖҰМЫС

Тақырыбы: Кері есептердің кейбір мәселелері

5В070500 – Математикалық және компьютерлік модельдеу

Орындаған: Жангарина Құралай

Рецензент,

к.ф.м.н.,профессор

Елдесбай Елдесбай Т.Ж

«06» мамыр 2019 ж.

Ғылыми жетекші,

к.ф.м.н.,профессор

__________ Джунисов А.Т.

«23» 05 2019 ж.

Алматы 2019

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Сәтбаев университеті
Ақпараттық телокоммуникациялық технологиялар институты
Математика кафедрасы
5В070500-«Математикалық және компьютерлік модельдеу»

ҚОРҒАУҒА ЖІБЕРІЛДІ

кафедра меңгерушісі
ф.-м.ғ.к, доцент
____________Р.Т.Кельтенова
«23» ____05____ 2018ж.

Дипломдық жұмысты орындауға
ТАПСЫРМА

Білім алушы: Жангарина Құралай Тұрсынқызы
Тақырыбы: «Кері есептердің кейбір мәселелері»
Университеттің бұйырғымен бекітілген №1162-б «16» __10__ 2018ж.
Жұмысты тапсыру мерзімі: «25» ___05___ 2019ж.

Дипломдық жұмысқа бастапқы деректер:
1) Дарбу, Гурса есептері
2) Кері есептердің жалпы түрде қойылуы
3) Кейбір кері есептерді шешу жолдары

Ұсынылатын негізгі әдебиеттер:

[1]. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.:Изд-во МГУ, 1999

[2]. Елдесбаев Т.Ж., Некоторые обратные задачи для линейных вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка

Дипломдық жұмысты дайындау

КЕСТЕСІ

Бөлімдердің атауы,әзірленетін сұрақтар тізбесі	Ғылыми жетекші мен кеңесшіге көрсету мерзімі	Ескертпелер
1 Кіріспе Дарбу, Гурса есептері	07.02.2019	
2 Негізгі бөлім Кері есептердің кейбір мәселелері 1. Гиперболалық оператордың характеристикалық жойылмалы типы мен реті бойынша екінші Дарбу өзгермелі есебін қайта қалпына келтіру 2. Жойылмалы гиперболалық оператордың Гурса есебін қайти қалпына келтіру	14.03.2019	
3 Қорытынды	05.04.2019	

Дипломдық жұмыс бөлімдерінің кеңесшілері мен норма бақылаушының аяқталған жұмысқа қойған қолтаңбалары

Бөлімдердің атаулары	Ғылыми кеңесші, аты-жөні (ғылыми дәреже,атағы)	Қол қойған мерзімі	Қол таңбасы
Нормабақылаушы	к.ф.-м.н., сениор-лектор Шатманов Ж.Ж.	23.05.2019	

Ғылыми жетекшісі ________________________/А.Т.Джунисов/

Тапсырманы орындауға алған білім алушы ____________/Қ.Т.Жангарина/

Күні "26" сентябрь 2018 ж.

ANNOTATION

In the study of inverse problems for model equations, almost all the fundamental difficulties associated with the study of similar questions for a fairly wide class of degenerate evolutionary equations and equations of mixed type are encountered.

АННОТАЦИЯ

При исследовании обратных задач для модельных уравнений встречаются почти все принципиальные трудности, связанные с изучением аналогичных вопросов для достаточно широкого класса вырождающихся эволючионных уравнений и уравнений смешанного типа.

АҢДАТПА

Модельді теңдеулерге арналған кері есептерді зерттеу барысында туынды эволюциялық теңдеулердің және аралас типті теңдеулердің кең ауқымды класына арналған аналогтық сұрақтарды меңгеруге байланысты барлық дерлік принциптік қиындықтар кездеседі.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Қарапайым және жеке туындылардағы дифференциалды теңдеулерге қатысты кері есебі деп, егер дифференциалды теңдеулердің кейбір класы және қарастырылып отырған класс теңдеулерінің біреуінің шешімі беріліп, және сол теңдеуді табу керек болған жағдайды айтамыз. Егер ізделініп отырған теңдеу сызықтық болса, онда кері есеп осы теңдеудің белгісіз коэффициенттерін табумен шектеледі. Физикалық, химиялық, биологиялық немесе ғарыштық процесстерді сипаттайтын жеке туындылардағы дифференциалды теңдеулердің коэффициенттері сол процесс өтетін ортаның сипаттамасына байланысты. Сондықтан қолданыста осындай теңдеулердің тұрақты немесе айнымалы коэффициенттерін табу есебі үлкен қызығушылық тудырады. Дифференциалды теңдеулерге арналған кері есептер теориясы салыстырмалы түрде жас математикалық пән болса да, келесі бағыттардағы зерттеулерді алысқа жеткізуге мүмкіндік беретін жалпылама әдістері бар: сейсмиканың кері кинематикалық есептері; гравитациялық және магниттік бағдарлау есептері алып келген күш теориясының кері есептері; атмосфераны лазерлі тексерудің кері есептері; атмосфералық оптиканың кері есептері; динамиканың кері есептері; серпімділік теориясының кері динамикалық есептері; астрофизика мен кванттық механиканың көп есебін азайтқан Штурм- Лиувиллдің кері есептері; ізделінетін коэффициенттердің немесе теңдеудің оң жағының белгілі бір функционалды кеңістікке жататын, бір немесе бірнеше айнымалылардың еркін функциялары болуы мүмкін математикалық физиканың дәстүрлі теңдеулері үшін сәйкес бірөлшемді және көпөлшемді кері есептері.

Кері есептер газ динамкасында; өсімдіктердің тіршілік ету ортасындағы энергия және масса алмасуда; дренаж жүйесінің есебімен көпқабатты орталардағы жерасты суларын болжауда; сынған жыныстардағы біртекті сұйықтықты сүзгілеуде; көпқабатты орталардағы жерасты суларының еркін беттегі қозғалысында; топырақ сияқты капилярлы-тесікті орталардағы жылу мен масса алмасудың жоғары бейстационар процесстерінде кездеседі. Сондай-ақ белгісіз коэффициент табудың немесе гиперболалық теңдеудің оң жағын табудың кері есептері типтің және қатардың сипаттамалық өрнегімен келсе, бұл есептердің шешімдері тек Дарбудың бірінші, екінші есебінің немесе Гурса есебінің берілгені бойынша алдын ала берілген функционалды кеңістікке тиесілі. Кері есептерді зерттеу кезінде модельді теңдеулер үшін эволюциялық және аралас түрдегі теңдеулерден туындайтын кең ауқымды класс үшін ұқсас сұрақтарды зерттеумен байланысты барлық дерлік қағидатты қиындықтар кездеседі.

1 Шекаралық аймақтағы туындатқыш гиперболалық операторларды қалпына келтіру. Теңдеудің белгілі оң жағы бойыша Эйлер Дарбу операторын қайта қалпына келтіру

X, Y айнымалыларының $\Omega = \{x, y\colon 0 < x < y\}$ Эвклид жазығы аймағында Эйлер – Дарбу – Пуассон теңдеуін қарастырамыз

$$E(\beta,\beta)U = U_{xy} + \frac{\beta'}{y-x}U_x - \frac{\beta}{y-x}U_y = \frac{f(x,y)}{(y-x)^{\mu}} \qquad (1.1)$$

мұндағы $\mu = const < 2$.

Келесідей белгілеулер енгізейік $D(\beta', \beta) - C(0 \leq x \leq y \leq 1) \cap C^1(\Omega)$ класында жататын аралас екінші ретті туындылы үздіксіз $\Omega - дағыU(x, y)$ нақты функциясының жиыны және $U_0(y) = U(0, y) \in C^1(0 \leq y \leq 1), U_1(x) =$ $= U(x, 1)\epsilon C^1(0 \leq x \leq 1); D(\beta', \beta)$ -$U(x, y),\ x, y \in \Omega$ жатады.

B – $\zeta\Omega$ шекарасында немесе оның бөлігінде шарттарды алдын ала қанағаттандыратын $D(\beta', \beta)$ аймағында жататын $U(x, y), x, y \in \Omega$ функция-сының кеңістігі.

$F = \{f\}$–$f(x, y)$ функциясының Ωтегіс аймағындағы кеңістігі.

Бұл бөлімде $k = [\beta]$, $k' = [\beta']$ –сәйкесінше β', β сандарының *нақтыбөлігі*. Егер 0<x<1, функция $\tau(x) \neq 0$, μ– толық емес, ал керісінше болған жағдайда толық бөлігі

$$\bar{J} = [0,1]$$

Есеп. Егер:

$$E(\beta', \beta)\mathrm{U(x, y)} = \mathrm{f(x, y)}(\mathrm{y} - x)^{-\mu}$$

Белгілі болса $f \in F$белгіліоңжақбөлігібойынша$U\epsilon B$мен$E(\beta', \beta)$, операторын табу керек.

Теорема. Егер:

– $E(\beta', \beta) = E(\beta, \beta),\ D(\beta', \beta) = D(\beta, \beta)$, $\beta \geq 1, \beta + 1 - k > \mu$, $\beta \neq k$ кезінде;

– f - F керісінше фукнциясы болса, егер $\beta = k$ болса онда $f \in C(\overline{\Omega})$, егер $\beta \neq k$ онда $f, f_x, f_y, f_{xy} \in C(\overline{\Omega})$;

– B- келесі шарттарды қанағаттандыратын

$$U_0(x)=\varphi_0(x),\ \lim_{y\to x}(y-x)^{\varepsilon})\,U(x,y)=\tau(x), 0\le x\le 1 \qquad (1.2)$$

мұндағы$\varphi_0(x),\tau(x)$ функциясы, $\varphi_0(x)\epsilon C^2(\bar{J}),\tau(x)\epsilon C^{k+1}(\bar{J})$, $\tau(0)=\tau'(0)=\cdots=\tau^{(k)}(0)=0$ егер $\beta\neq k$, және $\varphi_0(x)\epsilon C^1(\bar{J}),\tau(x)\epsilon C^k(\bar{J})$,егер $\beta\neq k$; $D(\beta,\beta)$ аймағындағы$U(x,y)$ функциясының кеңістігі1-шіесептің бір ғана шешімі бар.

Дәлелдеуі. (1) теңдеуі үшін Риман функциясының қасиетінен

$$R(\xi,\eta;x,y)=(\eta-\xi)^{\beta+\beta'}(\eta-x)^{-\beta}(y-\xi)^{-\beta'}\,F(\beta,\beta',1;)$$

Мұндағы $\sigma_{\xi\eta}=[(x-\xi)(\eta-y)/(\eta-x)(y-\xi)]$,*aF(a,b,c;z)* – гипер-геометриялық функция, және$E(\beta',\beta)$операторынан шығатын $U(x,y)\in D(\beta',\beta)$ жәнеf(x,y) $\epsilon\, C(0\le x\le 1)$ функциялары үшін(1.1) теңдеукелесі қаныстқа эквивалентті [3,4]

$$U(x,y)=(1-x)^{-\beta}y^{-\beta}F(\beta,\beta',1;\sigma_{01})U_1(0)-y^{\beta'}\int_y^1\left(\eta U_0'(\eta)+\beta' U_0(\eta)\right)\eta^{\beta+\beta'}\left(\eta--x^{)-\beta}F\left(\beta,\beta',1;\sigma_{0\eta}\right)d\eta+(1-x)^{-\beta}\int_0^x\left((1-\xi)U_0'(\xi)-\beta U_1(\xi)\right)\left(1--\xi^{\beta+\beta'-1}(y-\xi)^{-\beta'}F\left(\beta,\beta',1;\sigma_{\xi 1}\right)d\xi-\int_0^x\left(y-\xi\right)^{-\beta'}d\xi\int_y^1(\eta-\xi^{\beta+\beta'-\mu}(\eta--x)^{-\beta}F\left(\beta,\beta',1;\sigma_{\xi\eta}\right)f(\xi,\eta\right)d\eta\right)\right)$$

(1.3)

Гипергеомтериялық функция үшін белгілі формуланы қолдананып[5]

$$F(a,b,c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;z), Re\ c>Re\ b,(*)$$

(1.3)теңдікті келесі түрде жазамыз

$$U(x,y)=(y-x)^{1-\beta-\beta'}\{y^{\beta-1}(1-x)^{\beta'-1}F(1-\beta,1-\beta^1,1;\sigma_{01})U_1(0)--y^{\beta-1}\int_y^1\Phi_{\beta'}(\eta)(\eta-x)^{\beta'-1}F\left(1-\beta,1-\beta';1;\sigma_{0\eta}\right)d\eta+(1--x)^{\beta'-1}\int_0^x\psi_\beta(\xi)(y-\xi)^{\beta-1}F\left(1-\beta,1-\beta',1;\sigma_{\xi 1}\right)d\xi-\int_0^x(y-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_y^1(\eta--\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}F(1-\beta,1-\beta',1;\sigma_{\xi\eta})\ \ f(\xi,\eta)d\eta\}. \qquad (1.4)$$

мұндағы $\Phi_{\beta'}(\eta)=\eta U_0'(\eta)+\beta' U_0(\eta),\Psi_\beta(\xi)=(1-\xi)U_1'(\xi)-\beta U_1(\xi)$ (1.4) өрнектен $\beta'=\beta$ болғанда, (2) теңдеуді ескере отырып

$$\lim_{y\to x}(y-x)^{\varepsilon}U(x,y)=\lim_{y\to x}(y-x)^{1-2\beta\to\varepsilon}\{\,y^{\beta-1}(1-x)^{\beta-1}F(1-\beta,1-\beta',1;\sigma_{01})\times$$

$$\times\,\varphi_0-y^{\beta-1}\int_y^1(\eta\varphi_0'(\eta)+\beta\varphi_0(\eta)(\eta-x)^{\beta-1}F(1-\beta,1;\sigma_{0\eta})\,d\eta+(1-x)^{\beta-1}\times$$

$$\times\int_0^x\Psi_\beta\,(\xi)(y-\xi)^{\beta-1}F\big(1-\beta,1-\beta,1;\sigma_{\xi\eta}\big)d\xi-$$

$$-\int_0^x(y-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_y^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta-1}F(1-\beta,1-\beta;1;\sigma_{\xi\eta})\,f(\xi,\eta)d\eta\}.$$

Демек $\beta=\frac{1+\varepsilon}{2}$, өйткені $\tau(x)\neq 0$,0<x<1 болғанда

$$\lim_{z\to 1-0}F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \tag{1.5}$$

Онда

$$D_{0x}^{-\beta}\Psi_\beta(x)=g(x) \tag{1.6}$$

мұндағы

$$g(x)=\tau(x)+x\varphi_0(x)+\int_0^x d\xi\ \int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}\,f(\xi,\eta)d\eta,\beta=1;$$

$$g(x)=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(2k\text{-}1)}(1\text{-}x)^{1\text{-}k}\tau(x)\text{-}\frac{1}{\Gamma(k)}((k\text{-}1)x^k(1\text{-}x)^{1\text{-}k}\int_x^1\varphi_0(\eta)(\eta\text{-}x)^{k\text{-}2}d\eta\text{-}(1\text{-}x)^{1\text{-}k}\times$$

$$\times\int_x^1(x\text{-}\xi)^{\beta=k\text{-}1}d\xi\int_x^1(\eta\text{-}\xi)^{1\text{-}\mu}\big(\eta\text{-}x)^{k\text{-}1}f(\xi,\eta)d\eta\big),$$

$$\beta=k\neq 1;$$

$$g(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta\text{-}1)}(1\text{-}x)^{1\text{-}\beta}\tau(x)\text{-}\frac{1}{\Gamma(\beta)}((\beta\text{-}1)x^\beta(1\ \text{-}x)^{1\text{-}\beta}\int_x^1\varphi_0(\eta)(\eta\text{-}x)^{\beta\text{-}2}d\eta\text{-}$$

$$\text{-}\left((1\text{-}x)^{1\text{-}\beta}\int_0^x(x\text{-}\xi)^{\beta\text{-}1}d\xi\int_x^1(\eta\text{-}\xi)^{1\text{-}\mu}f(\xi,\eta)\,d\eta\right),$$

$$\beta\neq k.$$

мұндағы D_{0x}^{α} , D_{x1}^{α} операторлары $\alpha < 0$ кезіндегі α ретті бөліктеп интегралдау операторы және α ретті Лиувиль мағынасындағы жалпыланған туынды операторы болып табылады. $\Gamma(\alpha)$ - Эйлердің гамма функциясы.[6]

Егер g(x) оң бөлігі J үздіксіз интервалында (k+1) –ретіне дейінгі туындысы бар және $\beta \neq k$ кезіндегі g(0)=g'(0)=…=$g^{(k)}(0)$=0,$\beta = k$ үшін k- ретті туындысы бар болса, (1.6) Абельдің игтегралдық теңдеуі әрқашан қалпына келеді. [7]

$\tau(x), \varphi_0(x), f(x,y)$ функцияларына және β и μ параметрлеріне түсірілген шектеулер күшінде g(x) кіретін ,$\beta \neq k$ үшін $g^{(k-1)}$(x) ал $\beta = k \neq 1$ үшін $g^{(k)}(x) = \Psi_\beta(x)$ түрінде қарастырып көрейік

$$g^{(k+1)}(x) = x^{\beta-k-1}(1-x)^{-\beta-k} g_1(x), \beta \neq k, \qquad (1.7)$$

$$g^{(k)}(x) = \Psi_\beta(x) = (1-x)^{1-2k} g_2(x), \beta = k \neq 1 \,, \qquad (1.8)$$

мұндағы$g_1(x)$ және$g_2(x)$– үзіліссіз функция .

Лейбница теңдеуін қолданып

$$(P(x) * Q(x))^{(n+1)} = P^{(n+1)}(x)Q(x) + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^{P} P^{(n-1-p)}(x) * Q^{(p)}(x) + $$
$$+P(x)Q^{(n-1)}(x).(1.9)$$

мұндағы $\beta \neq k$ болғада, $g^{(k+1)}(x)$ беріледі

$$g^{(k+1)}(x) = x^{\beta-k-1}(1-x)^{-\beta-k}\left(R_\beta(x) + P_\beta(x) + Q_\beta(x)\right), \qquad (1.10)$$

мұндағы $R_\beta(x), P_\beta(x)$ және$Q_\beta(x)$өрнектер

$$R_\beta(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta-1)}((-1)^{k+1}\prod_{i=0}^{k}(\beta-1+i)x^{k+1-\beta}\tau(x) - x^{k-1-3}(1-x)^{k+1} \times$$
$$\times\ \tau^{(k+1)}(x) + x^{k+1-\beta}(1-x)^{\beta+k}\sum_{p=1}^{k} C_{k+1}^{P}\,((1-x)^{1-\beta})^{(k+1-p)}\tau^{(7)}(x)) \qquad (1.11)$$

$$P_\beta(x) = -\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta)}\{(\prod_{i=0}^{k}(\beta - i(1-x)^{k+1} + (-1)^{k+1}\prod_{i=0}^{k}(\beta-1-i)x^{k+1} +$$

$$+x^{k+1}(1-x)^{\beta+k}\sum_{p=1}^{k} C_{k+1}^{p}\,(x^\beta)^{(k+1-p)}(\int_x^1 \varphi_0(\eta)(\eta-x)^{\beta-2}d\eta +$$

$$+x^{k+1}(1-x)^{\beta+k}\sum_{p=1}^{k} C_{k+1}^{p}\,(x^\beta(1-x)^{1-\beta})^{(k+1-p)}(\int_x^1 \varphi_0(\eta)(\eta-x)^{\beta-2}d\eta)^{(p)} +$$

$$+\prod_{i=0}^{k=1}(\beta-2-i)x^{k+1}(1-x)^{\beta-1}\varphi_0(1) -$$

$$\prod_{i=0}^{k-2}(\beta-2-i)x^{k-1}(1-x)^{\beta}\varphi_0'(1) +$$

$$+\prod_{i=0}^{k-1}(\beta-1-i)\,x^{k+1-\beta}(1-x)^{\beta+k}\int_x^1 \varphi_0''\,(\eta)\big(\eta-x\big)^{\beta-k+1}d\eta\} \qquad (1.12)$$

$$(Q_\beta(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\{(-1)^{k+1}\prod_{i=0}^{k}(\beta-i)x^{k+1-\beta}\int_0^x(x-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}.$$

$$(\eta-x)^{\beta-1}f(\xi,\eta)d\eta + x^{k+1-\beta}(1-x)^{\beta+k}\sum_{p=1}^{k} C_{k+1}^{p}\,((1-x)^{1-\beta})^{(k+1-p)}\times$$

$$\times(\int_0^x(x-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta-1}f(\xi,\eta)d\eta)^{(p)} + x^{k+1-\beta}\times$$

$$\times(1-x)^{1+k}\frac{d}{dx}(\prod_{i=0}^{k=1}(\beta-1-i)\int_0^x(x-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta-1}\times$$

$$\times f(\xi,\eta)d\eta + \int_0^x\int_x^1 d\eta + \sum_{p=1}^{k=1} C_k^p((x-\xi)^{\beta-1})^{(k-p)}[(\eta-\xi)^{1-\mu}f(\xi,\eta)\times$$

$$\times d\eta d\xi + (-1)^k\prod_{p=1}^{k=1} C_k^p\,((x-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}f(\eta-x)^{\beta-k-1}\times$$

$$\times f(\xi,\eta)d\eta)\} \qquad (1.13)$$

$\beta = k \neq 1$ үшін (1.9), $g^{(k)}(x) = \Psi_\beta(x)$түрде болады

$$g^{(k)}(x) = (1-x)^{1-2k}\big(R_k(x) + P_k(x) + Q_k(x)\big) \qquad (1.14)$$

мұндағы

$$R_k(x) = (-1)^k (k-1)\tau(x) + \frac{(k-1)!}{(2k-1)!}\{(1-x)^k \tau^{(k)}(x) +$$

$$+(1-x)^{2k-1} \sum_{p=1}^{k=1} C_k^p ((1-x)^{1-k})^{(k-p)} \big(\tau(x)\big)^{(p)}\},(1.15)$$

$$\mathrm{P_k(x)=-\{k(1-x)^k \sum_{p=1}^{k=1} C_k^p (x^k)^{(k\text{-}p)}((1\text{-}x)^{1\text{-}k})^{(p)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \prod_{i=0}^{k=1} (k-1+i)x^k\} \int_x^1 \varphi_0(\eta)(\eta-x)^{k-2}\, d\eta - \frac{1}{(k-1)!} \sum_{p=1}^{k=1} C_k^p\, (x^k(1-x)^{1-k})^{(k-p)},$$

$$(\int_0^1 \varphi_0(\eta)(\eta-x)^{k-2} d\eta)^{(p)} + \frac{1}{k-1} x^k (1-x)^k \varphi_0'(x) \qquad (1.16)$$

$$Q_k(x) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \prod_{i=0}^{k-1}(k-1+i) \int_0^x (x-\xi)^{k-1} d\xi \int_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu},$$

$$(\eta-x)^{k-1} f(\xi,\eta) d\eta + \frac{1}{(k-1)!}(1-x)^{2k-1} \sum_{p=1}^{k-1} C_k^p ((1-x)^{1-k})^{(k-p)} \times$$

$$\times (\int_0^x (x-\xi)^{k-1} d\xi \int_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} (\eta-x)^{k-1} f(\xi,\eta) d\eta)^{(p)} +$$

$$+(1-x)^k\{\int_x^1 (\eta-x)^{k-\mu} f(x,\eta) d\eta - (k-1)\int_0^x d\xi \int_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} \times$$

$$\times (\eta-x)^{k-2} f(\xi,\eta) d\eta + \frac{1}{(k-1)!}\frac{d}{dx}\int_0^x \int_x^1 \sum_{p=1}^{k-1} C_{k-1}^p ((x-\xi)^{k-1})^{(k-1-p)} \times$$

$$\times ((\eta-x)^{k-1})^{(p)} (\eta-\xi)^{1-\mu} f(\xi,\eta) d\eta d\xi + (-1)^k \int_0^x (x-\xi)^{k-\mu} f(\xi,x) d\xi +$$

$$+(-1)^{k-1}(k-1)\int_0^x (x-\xi)^{k-2} d\xi \int_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} f(\xi,\eta)\, d \qquad (1.17)$$

Егер $\beta = 1$ болса

$$g^{\cdot}(x) = \Psi_\beta(x) = \tau'(x) + \varphi_0(x) + x\varphi_0'(x) + \int_x^1 (\eta - x)^{1-\mu} f(x,\eta)d\eta -$$

$$-\int_0^x (x-\xi)^{1-\mu} f_\beta(\xi, x)d\xi. \quad (1.18)$$

1.1-1.17 өрнектерінен , $R_\beta(x), P_\beta(x), Q_\beta(x), R_k(x), P_k(x), Q_k(x)$ функциялары үздіксіз екені көрінеді және (1.17) ,(1.18) теңдеулері арқылы беріледі. Сондықтан (1.16) теңдеуінен $\Psi_\beta(x)$ функциясы табылады. $\beta \neq k$ үшін гипергеометриялық функцияның интегралдық түрін пайдалана отырып [5]

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-\alpha}dt$$

$$Rec>Reb, \quad (**)$$

және (*) формуласымен бағалау әділеттілігін орнатамыз

$$\Psi_\beta(x) = (1-x)^{1-2\beta} O(1) \quad (1.19)$$

бұдан,

$$U(x,y) = (l-x)^{-\beta} y^{-\beta} (\beta,\beta,1;\sigma_{01})\varphi_0(1) -$$
$$-y^{-\beta} \int_y^1 (\eta\varphi_0'(\eta) + \beta\varphi_0(\eta)\eta^{2\beta-1}(\eta-x)^{-\beta} F\big(\beta,\beta,1;\sigma_{0\eta}\big)d\eta +$$
$$+(1-x)^{-\beta} \int_0^x \Psi_\beta(\xi)(1-\xi)^{2\beta-1}(y-\xi)^{-\beta} F(\beta,\beta,1;\sigma_{\xi l})\, d\xi -$$
$$-\int_0^x (y-\xi)^{-\beta} d\xi \int_y^1 (\eta-\xi)^{2\beta-\mu}(\eta-x)^{-\beta} F\big(\beta,\beta,1;\sigma_{\xi\eta}\big) f(\xi,\eta)d\eta, \quad (1.20)$$

мұндағы $\beta = \frac{1+\xi}{2}$.

Жалпы жағдайға көшейік. Егер бір ғана параметр, масылы β' еркін түрде берілсе, онда β келесі параметрін анықтау керек.

Екінші теорема. Егер:

1) $\beta \neq k, \beta' \neq k'$ үшін $\beta > 0$, $\beta' \geq 1$,келесі теңсіздік орындалса;

2)f − F-тің берілген функциясы егер $\beta = k$,онда k>k' f үшін $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{k-k'}}{\partial y^{k-k'}} \in C(\overline{\Omega})$,ал $k \leq k'$ үшін $f \in C(\overline{\Omega})$ Егер , $\beta \neq k$ онда $k' \geq k +$ $+1$ f үшін $\frac{\partial f}{\partial x} \epsilon C(\overline{\Omega}), k = k' f$ үшін $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in C(\overline{\Omega})$, ал $k > k'$ f үшін $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{k-k'} f}{\partial y^{k-k'+1}} \in C\ (\overline{\Omega})$;

3) B- келесі шарттарды қанағаттандыратын

$$U_0(x) = \varphi_0(x), \lim_{y \to x} (y - x)^{\varepsilon})\ U(x, y) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1$$

мұндағы$\varphi_0(x), \tau(x)$ берілген функциясы,

егер$\beta = k$, то $\tau(x) \in C^k(\bar{J})$,k-k'+1>0 үшін $\varphi_0(x) \epsilon C^{k-k'}(\bar{J}), k - k' + 1 < 0$ үшін$\varphi_0(x) \epsilon C^1(\bar{J})$;

егер$\beta \neq k$, онда$\tau(x) \in\ C^{k+1}(\bar{J}), \tau(0) = \tau'(0) = \cdots = \tau^{(k)}(0) = 0$.

k-k'+2>0үшін$\varphi_0(x) \in C^{k-k'-2}(\bar{J})$,ал k-k'+2≤0 үшін $\varphi_0(x) \epsilon C^1(\bar{J})$

онда 1 есептің шешімі бар.

Дәлелдеу.(1.4) теңдеуден (1.21) шарт арқылы алатынымыз

$$\lim_{y \to x} (y - x)^{\varepsilon} U(x, y) = \lim_{y \to x} (y - x)^{1-\beta-\beta'} \{ y^{\beta-1} (1 - x)^{\beta-1} F(1-, \beta, 1 - \beta', 1; \sigma_{01})$$

$$\varphi_0(1) - y^{1-\beta} \int_y^1 \eta \varphi_n'(\eta) + \beta' \varphi_0(\eta))(\eta - x)^{\beta'-1} F\big(1 - \beta, 1 - \beta', 1; \sigma_{0\eta}\big) d\eta +$$

$$+(1 - x)^{\beta'-1} \int_0^x \Psi_\beta\ (\xi)(y - \xi)^{\beta'^{-1}} F\big(1 - \beta, 1 - \beta', 1; \sigma_{\xi\eta}\big) d\xi -$$

$$- \int_0^x (y - \xi)^{\beta-1} d\xi \int_y^1 (\eta - \xi)^{1-\mu} \big(\eta - x\big)^{\beta'-1} F\big(1 - \beta, 1 - \beta', 1; \sigma_{\xi\eta}\big) f(\xi, \eta) d\eta \big\}.$$

Бұдан

$$\beta + \beta' = 1 + \varepsilon (1.22)$$

және (1.5) ескеріп 0<x<1 үшін $\tau(x) \neq 0$,

$$D_{0x}^{-\beta} \Psi_\beta(x) = g(x) (1.23)$$

мұндағы

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\tau(x)\text{-}x^{\beta}\varphi_0(x)+\int_0^x(x\text{-}\xi)^{\beta\text{-}1}d\xi\int_x^1(\eta\text{-}\xi)^{1\text{-}\mu}f(\xi,\eta)\,d\eta\right), \beta'=1,$$

$$g(x)=\frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta+\beta'-1)}(1-x)^{1-\beta'}\tau(x)-\frac{1}{\partial(\beta)}(\beta'-1)x^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}\int_x^1(\eta-$$
$$-x)^{\beta'-2}d\eta-(1-x)^{l-\beta'}\int_0^x(x-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_x^1(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta),.$$
$$\beta'\neq 1.$$

$\tau(x), \varphi_0(x), f(x,y)$ функциялары және β, β', μ параметрлерліне қатысты барлық шарттар орындалған кезде(1.22) теңдеуінен β сөзсіз қалпына келтіріледі, ал (1.23) Абельдің интегралдық теңдеуінен $\Psi_\beta(x)$ дара түрде анықталады және келесі бағалау дұрыс

$$\Psi_\beta(x)=(1-x)^{l-\beta-\beta'}O(1) \tag{1.24}$$

Егер$\beta\neq kg^{(k+1)}(x)$ және$\beta=kg^{(k)}(x)=\Psi_\beta(x)$ келесі түрденақты

$$g^{(k+1)}(x)=x^{\beta-k-1}(1-x)^{-\beta'-k}\left(R_{\beta\beta'}(x)+P_{\beta\beta'}(x)+Q_{\beta\beta'}(x)\right) \tag{1.25}$$

$$g^{(k)}(x)=(1-x)^{1-\beta'-k}\left(R_{k\beta'}(x)+P_{k\beta'}(x)+Q_{k\beta'}(x)\right) \tag{1.26}$$

мұндағы

$$R_{\beta\beta'}(x)=\frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta+\beta'\text{-}1)}((\text{-}1)^{k+1}\prod_{i=0}^{k}(1\text{-}\beta'\text{-}i)x^{k+1\text{-}\beta}\tau(x)+$$
$$+x^{k+1\text{-}\beta}(1\text{-}x)^{k+1}\tau^{(k+1)}(x)+x^{k+1\text{-}\beta}(1\text{-}x)^{\beta'+k}\sum_{p=1}^{k}C_{k+1}^{p}((1\text{-}x)^{k+1\text{-}p}\tau^{(p)}(x)) \tag{1.27}$$

$$P_{\beta\beta'}(x)=-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\{A(x)+(-1)^k\prod_{i=0}^{k}(\beta'-2-i)x^{k+1}(1-x)^{k+1}\times$$
$$\times\int_x^1\varphi_0(\eta)(\eta-x)^{\beta'-k-3}d\eta\}, k'\geq k+2, \tag{1.28}$$

$$P_{\beta\beta'}(x) = -\frac{1}{\Gamma(\beta)}\{A(x) + (-1)^{k'} \prod_{i=0}^{k'-2} (\beta' - 2 - i) x^{k+1}(1-x)^{k+1}$$

$$\frac{d^{k-k'+2}}{dx^{k-k'+2}} \int_x^1 \varphi_0(\eta)(\eta - x)^{\beta'-k'-1} d\eta\}, k' < k + 2, \quad (1.29)$$

$$A(x) = -\{(1-x)^{k+1} \prod_{i=0}^{k+1} (\beta - i) + (-1)^{k+1} \prod_{i=0}^{k} (1-\beta' - i) x^{k+1} + x^{k+1-\beta}(1-x)^{\beta'+k} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{k} C_{k+1}^{p} \left(x^{\beta}\right)^{(k+1-p)} \left((1-x)^{1-\beta'}\right)^{(k+1-p)} \left(\int_x^1 \varphi_0(\eta)(\eta - x)^{\beta'-2} d\eta\right)^{(p)}, \qquad (1.30)$$

$$Q_{\beta\beta'}(x) = \frac{1}{\partial(\beta)}\{(-1)^{k+1} x^{k+1-\beta} \prod_{i=0}^{k} (1-\beta' - i) \int_0^x (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_x^1 (\eta - \xi)^{1-\mu} \times$$

$$\times (\eta - x)^{\beta'-1} f(\xi,\eta) d\eta + x^{k+1-\beta}(1-x)^{\beta'+k} \sum_{p=i}^{k} C_{k+1}^{p} \left((1-x)^{1-\beta'}\right)^{(k+1-p)} \times$$

$$\times \left(\int_0^x (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} (\eta - x)^{\beta'-1} f(\xi,\eta) d\eta\right)^{(p)} \} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^{k+1-\beta}(1-x)^{\beta'+k} \prod_{i=0}^{k=1} (\beta - 1 - i) \frac{d}{dx}\{\int_0^x (x-\xi)^{\beta-k-1} d\xi \int_x^1 (\eta - \xi)^{1-\mu} \times$$

$$\times (\eta - x)^{\beta'-1} f(\xi,\eta) d\eta + \int_0^x \int_x^1 \sum_{i=0}^{k-1} C_k^p \left((x-\xi)^{\beta-1}\right)^{(k-p)} \left[(\eta - x)^{\beta'-1}\right]^{(p)} \times$$

$$\times (\eta - \xi)^{1-\mu} f(\xi,\eta) d\eta d\xi + (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} (\beta' - 1 - i) \int_0^x (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_x^1 (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_x^1 (\eta - \xi)^{1-\mu} \times$$

$$\times (\eta - x)^{\beta'-k-1} f(\xi,\eta) d\eta\}, k' \geq k, \qquad (1.31)$$

$$Q_{\beta\beta'}(x)=\frac{1}{\partial(\beta)}x^{k+1-\beta}(1-x)^{\beta'+k}\frac{d^{k-k'+1}}{dx^{k-k'+1}}\{\sum_{p=0}^{k-1}C_{k'}^{p}\left((1-x)^{1-\beta'}\right)^{(k'-p)}\times$$

$$\times\left(\int_0^x(x-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta\right)^{(p)}+\prod_{i=0}^{k'-1}(\beta'-1-i)\times$$

$$\times\int_0^x(x-\xi)^{\beta-k'-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^x\int_x^1\sum_{p=1}^{k'-1}C_{k'}^{p}\left((x-\xi)^{(k'-p)}(\eta-x)^{(\beta'-1)}\right)^{(p)}\times$$

$$\times(\eta-\xi)^{1-\mu}f(\xi,\eta)d\eta\eta\xi+(-1)^{k'}\prod_{i=0}^{k'-1}(\beta'-1-i)\int_0^x(x-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}\times$$

$$\times(\eta-x)^{\beta'-k'-1}f(\xi,\eta)d\eta+\frac{1}{\Gamma(\beta)}(-1)^{k+1}\prod_{i=0}^{k}\left(1-\beta'-i\right)x^{k+1-\beta}\times$$

$$\times\int_0^x(x-\xi)^{\beta-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta\},\quad k'<k; \tag{1.32}$$

$$R_{k\beta}(x)=\frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(k+\beta'-1)}\{(-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}(1-\beta'-i)\tau(x)+(1-x)^k\tau^{(k)}(x)+$$
$$+(1-x)^{\beta'+k-1}\sum_{p=1}^{k-1}C_k^p(1-x)^{(k-p)}\tau^{(p)}(x)\},\tag{1.33}$$

$$P_{k\beta'}(x)=\frac{-1}{\Gamma(\beta)}\{B(x)+(-1)^{k+1}x^k(1-x)^k\prod_{i=0}^{k-1}(\beta'-2-i)$$

$$\int_x^1\left(\varphi_0(\eta)(\eta-x)^{\beta'-k-2}d\eta\right\},k'\geq k+1,\tag{1.34}$$

$$P_{k\beta'}(x)=\frac{-1}{\Gamma(k)}\{B(x)+(-1)^{k'}\prod_{i=0}^{k-2}\left(\beta'-2-i\right)x^k(1-x)^k$$

$$\frac{d^{k-k'+2}}{dx^{k-k'+2}}\int_x^1\left(\varphi_0(\eta)(\eta-x)^{\beta'-k-1}d\eta\right\},k'<k+1,\tag{1.35}$$

$$B(x) = -\{\prod_{i=0}^{k-1}(k-i)(1-x)^{k-1} + (1-x)^{\beta'+k-1}\sum_{p=1}^{k-1} C_k^p\left(x^{\beta}\right)^{(k-p)} \times$$

$$\times\left((1-x)^{1-\beta'}\right)^{(p)} + (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1}(1-\beta'-i)x^k\}\int_x^1 \varphi_0(\eta)(\eta-x)^{\beta'-2}d\eta -$$

$$-(1-x)^{\beta'+k-1}\sum_{p=1}^{k-1} C_k^p\left(x^k(1-x)^{1-\beta'}\right)^{(k-p)}\left(\int_x^1 \varphi_0(\eta)(\eta-x)^{\beta'-2}d\eta\right)^{(p)} \quad (1.36)$$

$$Q_{k\beta'}(x) = \frac{1}{\partial(k)}\{(-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}(1-\beta'-i)\int_0^x (x-\xi)^{k-1}d\xi\int_0^1(\eta-\xi)^{1-\mu} \times$$

$$\times(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta + (1-x)^{\beta'+k-1}\sum_{p=1}^{k-1} C_K^P\left((1-x)^{1-\beta'}\right)^{(k-p)} \times$$

$$\times\left(\int_0^x (x-\xi)^{k-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta\right)^{(p)}\} +$$

$$+\frac{1}{\partial(k)}(1-x)^k\{\prod_{i=0}^{k-2d}(k-1-i)\frac{d}{dx}\int_{xx}^1(\eta-x)^{\beta'-1}(\eta-\xi)^{1-\mu} \times$$

$$\times f(\xi,\eta)d\eta + \int_0^x\int_x^1\sum_{p=1}^{k-1} C_k^p\,((x-\xi)^{k-1})^{(k-p)}\left((\eta-x)^{\beta'-1}\right)^{(p)} \times$$

$$\times(\eta-\xi)^{1-\mu}f(\xi,\eta)d\eta\eta\xi + (-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}(\beta'-1-i)\int_0^x(x-\xi)^{k-1}d\xi \times$$

$$\times\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-k-1}f(\xi,\eta)d\eta\}, k' \geq k \quad (1.37)$$

$$\mathrm{Q}_{k\beta'}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)}(-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}(1-\beta'-i)\int_0^x(x-\xi)^{k-1}d\xi\int_x^1(\eta-x)^{\beta'-1} \times$$

$$\times f(\xi,\eta)d\eta + \frac{1}{\Gamma(k)}(1-x)^{\beta'-1}\frac{d^{k-k'}}{dx^{k-k'}}\{\sum_{p=1}^{k'-1} C_{k'}^p\left((1-x)^{1-\beta'}\right)^{(k'-p)} \times$$

$$\times\left(\int_0^x(x-\xi)^{k-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta\right)^{(p)}\} + \frac{(1-x)^k}{\Gamma(x)}\frac{d^{k-k'}}{dx^{k-k'}} \times$$

$$\times\{\prod_{i=0}^{k-1}(k-1-i)\int_0^x(x-\xi)^{k-k'-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_x^1\sum_{p=1}^{k'-1}C_k^p\left((x-\xi)^{k-1}\right)^{(k'-p)}\left((\eta-x)^{\beta'-1}\right)^{(p)}(\eta-\xi)^{1-\mu}f(\xi,\eta)d\eta d\xi+$$

$$+(-1)^k\prod_{i=0}^{k'-1}\left(\beta'-1-i\right)\int_0^x(x-\xi)^{k-1}d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-k'-1}f(\xi,\eta)d\eta\}\ k'<k \quad (1.38)$$

1.27-1.38 формулалардан $R_{\beta\beta'}(x), P_{\beta\beta'}(x), Q_{\beta\beta'}(x), R_{\beta\beta'}(x), P_{k\beta'}(x), Q_{k\beta'}(x)$ үздіксіз және (1.25) және (1.26) формулалар арқылы берілген.

Сондықтан ізделінетін функция $U(x,y)\in B(1.3)$ түрінде болады, мұндағы $\Psi_\beta(x)=(1-x)U_1'(x)-\beta U_1(x)$ функциясы және β параметрі (1.23) және (1.22) теңдеулерден сәйкесінше анықталады. Дербес жағдайда, егер $\beta\neq k$кезінде $\beta>0,\ \beta'=n+1,\ \ n\geq 0, \beta+1-k>\mu$ болса, онда $\beta=\varepsilon-n, a\ \ U\in B$ формула арқылы беріледі

$$U(x,y)=(1-x)^{\eta-\varepsilon}y^{-n-1}F(\varepsilon-n,n+1;\sigma_{01})\varphi_0(1)-$$

$$-y^{-n-1}\int_y^1\left(\eta\varphi_0'(\eta)+(n+1)\varphi_0(\eta)\right)\eta^\varepsilon(\eta-x)^{\eta-\varepsilon}F\left(\varepsilon-n,n+1,1;\sigma_{0\eta}\right)d\eta+$$

$$+(1-x)^{n-\varepsilon}\int_0^x\Psi_\beta(\xi)(1-\xi)^{\beta+n}(y-\xi)^{-n-1}F\left(\varepsilon-n,n+1,1;\sigma_{\xi\eta}\right)d\xi-$$

$$-\int_0^x(y-\xi)^{-n-1}d\xi\int_y^1(\eta-\xi)^{1-\mu+\varepsilon}(\eta-x)^{n-\varepsilon}F\left(\varepsilon-n,n+1\ 1;\sigma_{\xi\eta}\right)f(\xi,\eta)d\eta.$$

Қызықты жағдайды байқауға болады бұл $\beta=\beta'$ жағдайындағы(1) теңдеуінің сипаттамасы x=0 жәнеу=0 теңбе-тең егер, осы есеп тегіс шекаралық мәндерде және f(x,y) оң жақ бөлігі үшін шешімі бар болса, онда U(x,y) y=1 беріледі ,ал x=0шекаралық шарттардан босатылады.Ал k=k'жағдайынан басқа кезде $\beta\neq\beta'$ үшін орындалмайды. Бірақ β және β' мәндерін беру арқылы, y=1U(x,y)есебінің β ,β' және μ шектеулері үшін есептің шешімін табуға болады. Жалпы айтқанда, (1) теңдеудің оң жақ бөлігі мен тегіс шекаралық шарттар үшін де орынды.

Мысалы келесі теореманы қарастырайық.

Үшінші теорема.Егер келесі шарттар орындалса

1)$\beta\neq k$ және $\beta'\neq k',\ \beta'+1-k'>\mu$үшін$\beta'>0,\ \beta\geq 1,\ \beta+1-k>\mu$

2)f-F-тің берілген функциясы, егер$\beta=k$,$\beta'\neq k'$ онда$k\geq k'$ үшін

$f \in C(\overline{\Omega})$,ал $\beta' = k'$ үшін және $k' \leq k+1$,онда $k' < k+1$ $f \in C(\overline{\Omega})$,ал $k' = k+1$,f, үшін $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{k-k'} f}{\partial x^{k-k'}} \in C(\overline{\Omega})$,егер$\beta \neq k$

$k' = k+1, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in C(\overline{\Omega})$, онда k>k'f үшін , $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\overline{\Omega})$, *ал* k=$k'$$\frac{\partial f}{\partial y}$,$f$ үшін , $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in C(\overline{\Omega})$;

3) B- $D(\beta, \beta)$ дағы $U(x, y)$ функциясының кеңістігі келесі шарттарды қанағаттандыратын болса,

$$U_1(x) =, \lim_{y \to x} (y-x)^{\varepsilon}) \; U(x, y) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1,$$

мұндағы $\varphi_1(x), \tau(x) -$ берілген функциялар,және егер $\beta = k, \beta' \neq k'$, және $\tau(x) \epsilon C^k(\bar{J})$,$k' - k + 1 \leq 0$ үшін $\varphi_1(x) \epsilon C^1(\bar{J})$,

ал $k' - k + 1 > 0$ үшін $\varphi_1(x) \epsilon C^{k'-k+1}(\bar{J})$;
егер , $\beta' \neq k', \beta + 1 - k > \mu$ $\beta' = k'$ және әрдайым $k' \leq k+1$ онда $\tau(x) \epsilon C^k(\bar{J})$,$k' \leq k+1$ үшін $\varphi_1(x) \epsilon C^1(\bar{J})$,
ал $k' = k+1$ үшін $\varphi_1(x) \epsilon C^2(\bar{J})$, егер $\beta = k, \beta' \neq k', \beta' + 1 - k' > \mu$, онда $\tau(x) \epsilon C^{k'+1}(\bar{J})$,$\tau(1) = \tau'(1) = \cdots = \tau^{(k')}(1) = 0$;

$k - k' + 2 \leq 0$ үшін $\varphi_1(x) \epsilon C^1(\bar{J})$,
ал$k - k' + 2 > 0$ үшін $\varphi_1(x) \epsilon C^{k'-k+2}(\bar{J})$; егер$\beta \neq k, \beta + 1 - k > \mu$,
$\beta' \neq k', \beta' + 1 - k' > \mu$ және$k' \leq k$, онда
$\tau(x) \; \epsilon C^{k'+1}(\bar{J})$, $\tau(1) = \tau'(1) = \cdots = \tau^{(k')}(1) = 0$;

$k - k' + 2 \leq 0$ үшін $\varphi_1(x) \epsilon C^1(\bar{J})$,
ал $k - k' + 2 > 0$ үшін $\varphi_1(x) \epsilon C^{k'-k+2}(\bar{J})$, онда 1 есептің бір ғана шешімі бар.

Дәлелі. $\beta = k, \beta' \neq k'$ және $k' \leq k\beta = k, \beta' \neq k'$ үшін $k' \leq k+1$ шартының орындалуы өте маңызды, өйткені олардың бұзылуы β и β' үшін есептің шешімі жоқ.

Бұл жағдайда есеп Абелдің интегралдық теңдеуіне эквивалентті.

$$D_{xl}^{-\beta'} \Phi_{\beta'}(x) = g(x), \quad (1.39)$$

мұндағы

$$g(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(-\tau(x)+(1-x)^{\beta}\varphi_1(x)-\int_0^x d\xi\int_x^1(\eta-\xi)^{\beta'-1}(\eta-\mu)^{1-\mu}f(\xi,\eta)\,d\eta\right),$$

$$\beta'=1,\ g(x)=\frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta+\beta'-1)}x^{1-\beta}\tau(x)+\frac{1}{\Gamma(\beta)}(\beta-1)x^{1-\beta}(1-x)^{-\beta}\int_0^x\varphi_1(\xi)(x-\xi)^{\beta-2}d\xi-$$

$$-x^{l-\beta}\int_0^x(x-\xi)^{\beta-2}d\xi\int_x^1(\eta-x)^{\beta'-1}(\eta-\xi)^{1-\mu}f(\xi,\eta)d\eta\},\ \beta'\neq 1.$$

β , β' , μ параметрлеріне және $\tau(x), \varphi(x), f(x,y)$ функцияларына түсірілген барлық шектеулердің орындалғанда(1.22) теңдеуінен β анықталады, ал(1.39) теңдеудің бір ғана шешімі бар $\Phi_{\beta'}(x)$. Сатылы түрде (**) теңдеулерін және белгілі формулаларды пайдаланып [5]:

$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}F(a,b,1+a+b-c,1-z)+\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}(1-z)^{c-a-b}\times$$

$$\times F(c-a,c-b,1-a-b;1-z), a+b-c\neq 0,\pm 1,2\ldots,$$

$$|\arg(z)|<\pi, |\arg(1-z)|<\pi,$$

$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-a}F\left(a,1+a-c;1+a-b;\frac{1}{z}\right)+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{b}\times$$

$$\times F\left(b,1+b-c;1+b-a;\frac{1}{z}\right), a-b\neq 0,\pm 1,+2\ldots,;$$

$$|\arg(-z)|<\pi, |\arg(1-z)|<\pi.$$

$\Phi_{\beta'}(x)$ үшін келесі бағалауды орнатамыз

$$\Phi_{\beta'}(x)=x^{1-\beta-\beta}O(1).$$

1 ескерту .$\beta\neq k$ және $\beta'\neq k'$ үшін $\beta+1-k>\mu, \beta'+1-k'\mu$ шарты бар болады, себебі олардың өзгерісі кезінде(6), (22),(38) теңдеулерінің шешімі жоқ.

2 ескерту. Егер $\beta\neq k$ және $\beta'\neq k'$және оның мәні y=1,ал (1) теңдеудің шекаралық мәндері мен оң жақ бөлігі тегістіктің шарттарын қанағаттандыратын болса, онда $k'<k$, $k'>k$, $\beta'+1-k'>\mu$ жағдайында $\beta+1-k>\mu$,
$\beta-k'+k\geq\mu$, шарттары орындалу үшін 1 есептің бір ғана шешімі болады.

3 ескерту. Осыған дейін μ нақты емес және екіден кіші болды нақты. $\mu \leq 1$ жағдайында есептің шектік теңсіздік түріндегі қойылымы кезінде β , β', μ байланыстыратын және (1) теңдеудің оң жақ бөлігінен Ω–дағы аралас екінші ретті туындының үздіксіздігін талап етуге болмайды.

4 ескерту.$\beta \neq \beta'$ үшін барлық қойылған кері есептердің қажетті шарты шешімінің $\beta' \geq 1, \beta > 0$ теңсіздігі болып таблады x=0 сипаттамасында және $\beta' > 0, \beta \geq 1$ теңсіздігі U берілген.

Сонымен, жоғарыда көрсетілген факторлар (1) теңдеудің сипаттамасы x=0 және y=1 жалпы айтқанда,шекаралық мәліметтер жадысында бірқалыпсыз және (1) теңдеудің оң жақ бөлігінің тегіс болуының қандай да бір сипаттамаларында x=0 және y=1 берілген φ_0(x) немесе φ_1(x) және β , β', μ параметрлерінен қажеттілігін көрсетеді.

2 Эйлера-Дарбу-Пуассон берілген операторы арқылы теңдеудің оң жақ бөлігін анықтау

Бұл бөлімде (1.1)Эйлера-Дарбу-Пуассона теңдеуі үшін келесі есеп қарастырылады

Бірінші есеп. Берілген Е(β,β')операторы бойынша $E(\beta,\beta')U(x,y) = f(x,y)(y-x)^{\mu}$ теңдеуін қанағаттандыратын $U \in B$ және $f\epsilon F,$ функцияларын табу керек.

Бірінші теорема.Берілген

$$E(\beta',\beta) = E(\beta',\beta),$$
$$D(\beta',\beta) = D(\beta',1), \beta' \geq 1 \text{ немесе } \beta' < 0;$$

B- $D(\beta'\ 1) \cap C(\overline{\Omega})$ –дағы U(x,y)функциясының кеңістігі болсын және келесі шарттарды қанағаттандырса

$$u(0,x) = \varphi_0(x), u(x,x) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1\ , \qquad (2.1)$$

мұндағыφ_0(x)және τ(x) − C($\bar{J}$) класындағы берілген функциялар F=(f)- f(x,y) функциясының кеңістігі келесі түрде берілсе

$$f(x,y) = a\varphi(x) + b\varphi(y) \qquad (2.2)$$

мұндағы a жәнеb – $\beta\ ,\beta'$, $\mu\lambda = const, a\ \varphi(x) \in C(\bar{J})$ тәуелді кейбір параметрлер. Онда 1 есеп 1<μ<2 шартында есептің бір ғана шешімі бар және Вольтеррдің үшінші текті интегралдық теңдеуіне эквивалентті.

$$\mu \leq 1 \text{ үшін}$$

$$x^{\alpha}\varphi(x) - \lambda \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt = \beta'\tau(x) - x\varphi_0'(x) - \beta\varphi_0(x) \quad (2.3)$$

Дәлелі.$\beta' = 1$ үшін [74] қарастылған жағдай шығады

Сондықтан 2-теореманың дұрыстығын $\beta' > 1$ жағдайында көрсетейік.

Белгілі теңдікті пайдаланып

$$E(\beta'\beta)u = (y-x)^{1-\beta-\beta'}\ E(1-\beta, 1-\beta')(y-x)^{\beta-\beta'-1}$$

және (1) шартының $\beta = 1$ кезіндегі біріншісін (3) қатынастың теңдігінен ескеріп

$$F(1, \beta', 1; z) = F(\beta', 1,1; z) = (1 - z)^{-\beta'}$$

алатынымыз $(y-x)^{\beta'}u(x,y) = (1-x)^{\beta'-1}u_1(1) - \int_y^1 \big(\eta\varphi_0'(\eta) + \beta'\varphi_0(\eta)\big)(\eta - x)^{\beta'-1}d\eta - \int_0^x d\xi \int_y^1 (\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta).$ (2.4)

(2.4) теңдігінде y → x шегіне өту арқылы

$$(1-\mathrm{x})^{\beta'-1}u_1(x) = \int_x^1 \big(\eta\varphi_0'(\eta) + \beta'\varphi_0(\eta)\big)(\eta-x)^{\beta'-1}d\eta +$$
$$+\int_0^x d\xi \int_0^1 (\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta$$

аламыз.

Дегенмен,

$$(y-x)^{\beta'}u(x,y) = \int_x^y \big(\eta\varphi_0'(\eta) + \beta'\varphi_0(\eta)\big)(\eta-x)^{\beta'-1}d\eta +$$
$$+\int_0^x d\xi \int_x^y (\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta =$$
$$= (y-x)^{\beta'}\{\int_x^y \big(\eta\varphi_0'(\eta) + \beta'\varphi_0(\eta)\big)t^{\beta'-1}dt +$$
$$+\int_0^x d\xi \int_0^1 (\eta-\xi)^{1-\mu}t^{\beta'-1}f(\xi,\eta)dt\},$$

мұндағы $\eta = x + (y-x)t.$

Сондықтан

$$u(x,y)\int_0^1 \big(\eta\varphi_0'(\eta) + \beta'\phi_0(\eta)\big)t^{\beta'-1}dt + \int_0^x d\xi \int_0^1 (\eta-\xi)^{1-\mu}t^{\beta'-1}f(\xi,\eta)dt,$$

$\beta'\tau(x) = x\varphi_0'(\eta) + \beta'\varphi_0(x) + \int_0^x (x-\xi)^{1-\mu}f(\xi,x)d\xi$ (2.5)

шығады.

(2) теңдеуден $\alpha = -\lambda, b = -2 - \mu$ ескеріп, 1 есептің шешімін (5) теңдеуден (3) интегралдық теңдеу арқылы аламыз,мұндағы $\alpha = 2 - \mu$.

Ал, енді $\beta' < 0$ жағдайын қарастырайық. $\beta = 1$ үшін (3) теңдеуден алатыныз

$$u(x,y) = (y-x)^{-\beta'}(1-x)^{\beta'-1}u_1(x) -$$

$$-(y-x)^{-\beta'}\int_y^1 \{\left(\eta\varphi_0'(\eta) + \beta'\varphi_0(\eta)\right) + \int_0^x (\eta-\xi)^{1-\mu} f(\xi,\eta)d\xi\}(\eta-x)^{\beta'-1}d\eta$$

немесе

$$u(x,y) = (y-x)^{-\beta'}(1-x)^{\beta'-1}u_1(x) -$$

$-(y-x)^{-\beta'}\int_y^1\{\left(\eta\varphi_0'(\eta) + \beta'\varphi_0(\eta)\right) + \int_0^x(\eta-\xi)^{1-\mu}f(\xi,\eta)^{1-\mu}f(\xi,\eta)d\xi\}(1-t)^{-\beta'-1}dt$ (2.6)

мұндағы$\eta = (y - xt)/(1-t)$

(2.6) теңдеуінде y→ x жағдайында шекке көшсек және $\beta' < 0$ ескерсек, алатынымыз

$$\beta'\tau(x) = x\varphi_0'(x) + \beta'\varphi_0(x) + \int_0^x (x-\xi)^{1-\mu} f(\xi,x)d\xi$$

Бірінші ескерту.Бірінші есептің (2) теңдеу үшін, $\beta' = 1$, $\beta' \geq 1$ немесе $\beta < 0$ және $u(x,1) = \varphi_1(x), u(\xi,x) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1$, мұндағы $\varphi_1(x), \tau(x)\epsilon C^1(0 \leq x \leq 1)$болғанда В жәнеf үшін де келесі теңдеуге келеді

$$(1-x)^\alpha\varphi(x) - \lambda\int_x^1 \varphi\,(t)(t-x)^{\alpha-1}dt = \beta\tau(x) + (1-x)\varphi_1'(x) + \beta'\varphi_1(x)$$

Ескере кететіні, екінші есеп үшін есептің қойылымында сипаттамалардың тепе-теңсіздік факторы [9]бастапқы мәліметтердің алып жүрушісі(носитель) ретінде көрсетіледі. Жалпы айтқанда, В тұрақты мәнінде x=0 сипаттамасында бастапқы мәліметтерді беру керек ,алβ' тұрақты үшін y=1 сипаттамасында беру керек.

Екінші ескерту. Осындай Bүшін де , егер $\beta = 0, \beta' \geq 1$немесе $\beta' < 0$ және $F = \{f\} - f(x,y)$ функциясының кеңістігі $f(x,y) = k_1(x,y)\varphi(x)$ түрінде берілсе, мұндағы $k_1(x,y) -$ y бойынша дербес туындылы үздіксіз $\overline{\Omega}$ -дағы берілген функция, сонымен қатар $k_1(x,x) \neq 0$, ал $\varphi(x\epsilon C(0 \leq x \leq 1)$, онда екіншіесеп Абелдің жалпыланған теңдеуіне эквивалентті.

3 Дарбудың екінші есебінің характеристикалық туындайтын типі мен ретіне сәйкес гиперболалық операторды қалпына келтіру

$\Omega -$ AB шектелген кесіндідегі x,y,айнымалылары жазықтығындағы шектелген бірбайланысты аймақ болсын : $0 \leq x \leq 1$ түзу y=0 және AC сипаттамасымен C(1/2,y_c),y_c>0 нүктесінен шығатын :$\xi = 0$, BC:$\eta = 1$ теңдеу

$$L(\alpha, p)u = yu_{yy} - y^{2m}u_{xx} + \alpha u_y + py^{m-\frac{1}{2}}u_x = f(x,y), m > 0 \qquad (3.1)$$

мұндағыα,ρ –нақты тұрақтылар.

Белгілеулер енгізейік: $D(\alpha, \rho)$–

$$u|_{AC} \epsilon C^1(\overline{AC \setminus} A), u|_{BC} \epsilon C^1(\overline{BC \setminus} B),$$

класында жататын, x және y бойынша екінші туындылыΩ үздіксіз аймағындағы u(x,y) функциясының нақты жиыны.

B - $\partial\Omega$ шекарасында немесе оның бөлігінде алдын ала берілген шарттарды қанағаттандыратын $D(\alpha, \beta)$ жататын $u(x,y), x, y \in \Omega$ функциясының кеңістігі

F={f}-f(x,y) функциясының Ω жеткілікті тегіс аймағындағы кеңістік .

Ескере кететініміз,$k = [\beta\ ], k' = [\beta]$– сәйкесінше β ,β'сандарының нақты бөлігі ,ε $-$берілген оң саны.

Бірінші есеп. Егер L $(\alpha, \rho)u(x,y) = f(x,y)$ белгілі болса, $f \in F$ берілген оң жақ бөлігі бойынша $u \in B$ функциясы мен L(α, ρ) операторын табу керек.

Бірінші теорема.ρ берілген болсын,алα белгісіз және:

1)$\alpha < -\frac{1}{2} - 3m, \rho > 0, \beta' + 1 - k' > \mu, \beta + 1 - k > \mu,$

$$\mu = 4m/(2m) + 1;$$

2)f-F –тегі берілген функция, және егер$\beta = k$, онда

$k > k'f$ үшін $f'_y, \dots \dots, f^{(k-k')}_{y^{k-k'}} \epsilon C(\overline{\Omega})$,егер де $\beta \neq k$, онда

$k' > k + 1f$ үшін $f'_x \in C\overline{(\Omega)}$,

k=k̓ f үшін$f'_x, f''_{xy} f'_y, \dots \dots, f^{(k-k'-1)}_{y^{k-k'}-1} \epsilon C\overline{\Omega})$,

3) B – $D(\alpha,\rho)$ -дегі $u(x,y)$ функциясының кеңістігі және де келесі шарттарды қанағаттандырады

$$u|_{AC} = \varphi_1(x), 0 \leq x \leq 1/2 \lim_{y\to 0} y^{\varepsilon} u_y(x,y) = v_1(x), \forall x \epsilon J, \quad (3.2)$$

Мұндағы $\bar{J} = [0,1], \varphi_1(\bar{x}), v_1(x) -$ берілген функциялар және,егер $\beta = k$,онда$v_1(x) \in C^k(\bar{J})$,

$k - k' + 1 > 0$ үшін $\varphi_1(x) \in C^{k-k'-1}[0,1/2]$, ал $k + 1 \leq k'$ үшін $\varphi_1(x) \in C^1[0,1/2]$ егер де $\beta \neq k$,то $v_1(x) \in C^{k+1}(\bar{J}), v_1(0) = v_1'(0) = \cdots = v_1^{(k)}(0) = 0, k - k' + 2 > 0$ үшін $\varphi_1(x) \in C^{k-k'+2}[0,1/2]$, ал $k + 2 \leq k'$үшін $\varphi_1(x) \in C^1[0,1/2]$, онда 1 есептің шешімі бар болады.

Дәлелі. Сипаттамалық координаталарға өте отырып, (1) теңдеуді келесі түрде жазамыз

$$u_{\xi\eta} + \frac{\beta'}{\eta-\xi} u_{\xi} - \frac{\beta}{(\eta-\xi)} u_{\eta} = \gamma \frac{f(x,y)}{(\eta,\xi)}, (\xi,\eta) \in \Delta \quad (3.3)$$

мұндағы

$$\beta' = \frac{1 - 2(\alpha - \rho + m)}{2(2m+1)}, \beta = \frac{1 - 2(\alpha + \rho + m)}{2(2m+1)}, \ \gamma = 1/4 \left(\frac{2m+1}{4}\right)^{(2m+1)/2}$$

Осыған байланстыΩ аймағы келесі түзулермен шектелген аймаққа өтеді AC: $\xi = 0$, BC: $\eta = 1$, AB: $\eta = \xi$, ал (2) шарты келесі шартпен алмастырылады$u(0,\eta) = \varphi_0(\eta)$,

$$\lim_{\eta-\xi\to} \left[\frac{2m+1}{4}(\eta - \xi)\right]^{\delta} \left(\mu_{\eta} - \mu_{\xi}\right) = v(\xi), 0 < \xi < 1, \quad (3.4)$$

Ынғайлы болу үшін

$$\delta = (2m + 2\varepsilon - 1)/(2m+1), \varphi_0(\eta) = \varphi_1(\eta/2)$$

$$v(\xi) = v_1(\frac{1+\xi}{2})$$

Келешекте ыңғайлы болу үшін ξ, η тәуелсіз айнымалылар орнына $x, y \in \Delta$ тәуелді айнымалыларды пайдаланамыз.

Белгілі болғандай (3.3) теңдеу[4] қатынасына пара-пар

$$u(x,y) = (1-x)^{-\beta} y^{-\beta'} F(\sigma_{01}) u(0,1) -$$

$$-y^{-\beta'} \int_y^1 \phi_{\beta'}(\eta) \eta^{\beta+\beta'-1} (\eta - x)^{-\beta} F(\sigma_{0\eta}) d\eta +$$

$$+(1-x)^{-\beta} \int_0^x \Psi_\beta(\xi)(1-\xi)^{\beta+\beta'-1}(y-\xi)^{-\beta} F(\sigma_{\xi l}) d\xi - \gamma \int_0^x (y-\xi)^{-\beta} d\xi. -$$

$$-\gamma \int_0^x (y-\xi)^{-\beta} d\xi \times$$

$$\times \int_y^1 (\eta - \xi)^{\beta+\beta'-\mu} (\eta - x)^{-\beta} F(\sigma_{\xi\eta}) f(\xi, \eta) d\eta,$$

$$\Phi_{\beta'}(\eta) = \eta u'(0,\eta) + \beta' u(0,\eta), \;\; \Psi_\beta(\xi) = (1-\xi) u'(\xi - 1) \beta u(\xi, 1), \qquad (3.5)$$

мұндағы $F(\sigma) = F(\beta, \beta', 1; \sigma)$ –гипергеометриялық функция,

$$\sigma_{\xi\eta} = [(x - \xi(\eta - y)]/[(y - \xi(\eta - x)]$$

Гипергеометриялық функцияға арналған белгілі формуланы пайдаланып[5]

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; z), \;\; Re\, c > Re\, b, \qquad (3.6)$$

(3.5) теңдіктен

$$u_y(x,y)-u_x(x,y)=(y-x)^{-\beta-\beta'}\{(y-x)y^{B-1}(1-x)^{\beta'-1}F_1\left(\sigma_{0\eta}\right)u(0,1)+$$

$$+y^{\beta-1}(y-x)^{\beta'-1}\Phi_{\beta'}(y)+\beta' y^{\beta-2}(y-x)\int_y^1\Phi_{\beta'}(\eta)(\eta-x)^{\beta'-1}F_1\left(\sigma_{0\eta}\right)d\eta+$$

$$+xy^{\beta-2}\int_y^1\Phi_{\beta'}(\eta)(\eta-x)^{\beta'-1}F_2\left(\sigma_{0\eta}\right)d\eta-$$

$$-\beta'(y-x)(1-x)^{\beta'-1}\int_0^x\Psi_\beta(\xi)(y-\xi)\times^{\beta-2}$$

$$\times F_1\left(\sigma_{\xi l}\right)d\xi-(1-x)^{\beta'-1}\int_0^x\Psi_\beta(\xi)(y-\xi)^{\beta-2}(x-\xi)\,F_2\left(\sigma_{\xi l}\right)d\xi+$$

$$+\beta'(y-x)\int_0^x(y-\xi)^{\beta-2}d\xi\int_y^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-1}F_1(\sigma_{\xi l}f(\xi,\eta)d\eta+$$

$$+(y-x)^{\beta'}\times$$

$$\times\int_0^x(y-\xi)^{\beta-\mu}f(\xi,y)d\xi+\int_0^x(y-\xi)^{\beta-2}(x-\xi)d\xi\int_y^1(\eta-x)^{\beta'-1}F_2(\sigma_{\xi\eta})\times$$

$$\times f(\xi,\eta)d\eta-(y-x)^\beta(1-x)^{\beta'-1}\Psi_\beta(x)+\beta'(y-x)y^{\beta'-1}\int_y^1\Phi_{\beta'}(\eta)\times$$

$$\times(\eta-x)^{\beta'-2}F_1\left(\sigma_{0\eta}\right)d\eta+y^{\beta-1}\int_y^1\Phi_{\beta'}(\eta)(\eta-x)^{\beta'-2}F_2\left(\sigma_{0\eta}\right)d\eta-$$

$$-\beta(y-x)(1-x)^{\beta-2}\int_0^x\varphi_\beta(\xi)(y-\xi)^{\beta-1}F_1\left(\sigma_{\xi l}\right)d\xi-(1-y)(1-x)^{\beta-2}\times$$

$$\times\int_0^x\Psi_\beta(\xi)(y-\xi)^{\beta-2}F_2\left(\sigma_{\xi\eta}\right)d\xi+(y-x)^\beta\int_y^1(x,\eta)d\eta+\beta(y-x)\times$$

$$\times\int_0^x(y-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-2}F_1\left(\sigma_{\xi\eta}\right)f(\xi,\eta)d\eta+\int_0^x(y-\xi)^{\beta-1}\,d\xi\int_y^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta-x)^{\beta'-2}F_2(\sigma_{\xi\eta})f(\xi,\eta)d\eta\}=(y-x)^{-\beta-\beta'}Q(x,y)\quad(3.7)$$

аламыз.

мұндағы

$$F_1(z) = F(1-\beta, 1-\beta', 1; z)$$

$$F_2(z) = F(-\beta, -\beta', 2; z), F(z) = F(\beta, \beta', 1; z)$$

(3.7) теңдіктен (3.4) шартының екіншісі күшінде

$$\lim_{y\to 0}\left[\frac{2m+1}{4}(y-x)\right]^{\delta}\left(u_y - u_x\right) = v(x) = \lim_{y\to x}(y-x)^{\delta-\beta-\beta'}Q(x,y) \qquad (3.8)$$

Бұдан егер $v(0)\ \neq 0\ \ \forall x \in J$болса

$$\delta - \beta' - \beta = 0 \qquad (3.9)$$

$$D_{0x}^{-\beta}\Psi_{\beta}(x) = g(x) \qquad (3.10)$$

аламыз.

Мұндағы

$$g(x) = -\Gamma(\beta+2)\Gamma(\beta'+2)/\Gamma(2)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+\beta'+$$

$$+2)[(\beta'--1)x^{\beta}(1-x)^{1-\beta'}\textstyle\int_x^1 \varphi_0(\eta)] \times$$

$$\times(\eta-x)^{\beta'-2}d\eta + (1-x)^{1-\beta'}\int_0^x (x-\xi)^{\beta-1}d\xi \times$$

$$\times \int_x^1(\eta-\xi)^{1-\mu}(\eta--x)^{\beta'-1}f(\xi,\eta)d\eta] \qquad (3.11)$$

$D_{0x}^{-\beta}$ –Лиувилль мағынасындағы бөліктеп дифференциалдау операторы.[6]

Егер $\varphi_1(x), v(x), f(x,y)$ функциялары және β, β' m параметрлеріне қатысты барлық шарттар орындалса, онда (9) теңдеуінен міндетті түрде α қалпына келтіріледі,ал Абельдің интегралдық теңдеуі қайтымды және одан жалғыз түрде $\Psi_{\beta}(x)$ функциясы анықталады, ол үшін келесі бағалау орынды [8]:

$$\Psi_\beta(x) = (1 - x)^{1-\beta-\beta'} O(1).$$

Сондықтан ізделінетін функция u(x,y)$\in B(5)$ формуладан сипаттамалық координатадан ескі айнымалыларға өту арқылы табылады.

Атап өтетіні, (1) теңдеуінің сипаттамасы [9] бастапқы мәлімет тасушы ретінде тең емес.

4Гаусс есебінен туындайтын гиперболалық операторды қалпына келтіру

Бұл бөлімнің негізгі мақсаты А.М. Нахушевтің кері есептерді зерттеу әдісінің, гиперболалық теңдеудің туындатқыш типі және ретімен С(х,у) белгісіз коэффициентін анықтаудағы идеясын тарату.

$$yu_{yy} - y^{2m}u_{xx} + \alpha u_y + py^{m-\frac{1}{2}}u_x + C(x,y)u = 0, \qquad (4.1)$$

А.В.Бицадзе ұсынылып және зерттеген[10,11].

Бізге белгілі болғандай, (1) теңдеудің шешімі мен туындысы, жалпы айтқанда у=0 сызығында шексіздікке айналады және осы сызық маңайында келесі α, ρ коэффициенттер мен m көрсеткішке тәуелді. Бұл жағдай төменде маңызды рөл атқарады.

$\Omega -$x,у айнымалылары жазықтығындағы кесінділермен шектелген шекті бір байланысты аймақ АВ:0$\leq$ х ≤ 1 у=0 түзуі $\mathrm{C}(1/2, \mathrm{y}_c)$, y_c>0 нүктесінен өтеді , АС сипаттамасы :$\xi = 0, \mathrm{BC}: \eta = 1$ (1) теңдеу $\mathrm{C}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \lambda\omega(\mathrm{x}) + \omega(\mathrm{y})$, мұндағы λ –нақты тұрақты,ал$\omega(\mathrm{x})$ J=(0,1) үздіксіз функция.

Келесі белгілеулерді енгіземіз : D –

$$u|_{AC} \in C^1\left(\overline{AC\backslash A}\right),$$
$$u|_{AB} \in C^1\left(\overline{BC\backslash B}\right),$$

класында жататын х пен у бойынша екінші ретті туындылы Ω .үздіксіз аймағындағы u(x,y) функциясының жиыны.

В- $\partial\Omega$ шекарасында немесе оның бөлігінде алдын ала берілген шарттарды қанағаттандыратын D жататын u(x,y),(x,y) $\in \Omega$ функциясының кеңістігі.

Бірінші есеп. Егер

$$u|_{AC} = \bar{\varphi}(>)u|_{BC} = \bar{\Psi}(x), \bar{\varphi}(c) = \bar{\Psi}(c)(4.2)$$

мұндағы$\bar{\varphi}(c), \bar{\Psi}(c)$ $-$берілген функциялар, белгілі болса, онда Ω аймағында (1) теңдеудің С(х,у) коэффициенті мен u(x,y) $\in$В шешімін табу керек

Бірінші теорема

Егер m>1/2,$\alpha = p - m + \frac{1}{2}, -4m < p < -m - 1/2$

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}_0(x) + \gamma\bar{\varphi}_1(x), \bar{\Psi}(x) = \bar{\Psi}_0(x) + \gamma\bar{\Psi}_1(x)$$

$$\bar{\varphi}_1 \epsilon C^1(\overline{AC}), \bar{\Psi}_1 \epsilon C^1(\overline{BC})\gamma = 1/4\left(\frac{2m+1}{4}\right)^{2m+1/4}$$

болса, онда есептің шешімі бар.
Дәлелі. Сипаттамалық координаталарға өткеннен кейін(4.1) теңдеу келесі түрде жазылады

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\beta'}{\eta-\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\beta}{\eta-\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} - \gamma\frac{C(\xi,\eta)}{(\eta-\xi)^\mu}u = 0 \qquad (4.3)$$

мұндағы

$$\beta' = \frac{1-2(\alpha-p+m)}{2(2m+1)}, \beta' = \frac{1-2(\alpha+\rho+m)}{2(2m+1)}, \mu = \frac{4m}{2m+1}$$

Сонымен қатар, Ω аймағы $\xi = 0, \eta = 1, \eta = \xi$ түзулермен шектелген Δ аймағына өтеді,ал (2) шарт төмендегі шартпен алмастырылады

$$u(0,\eta) = \varphi(\eta), u(\xi,1) = \Psi(\xi), \varphi(\eta) = \bar{\varphi}\left(\frac{\eta}{2}\right), \Psi(\xi) = \bar{\Psi}(\frac{1+\xi}{2}) \qquad (4.4)$$

Келешекте ыңғайлы жадай болу үшін(ξ,η) тәуелсіз айнымалылар орнына (x,y) ∈ Δ тәуелді айнымалыларды пайдаланамыз, алжоғарыда көрсетілген D және B кеңістіктері үшін сол белгілеулерді қалдырамыз.

Риман функциясының қасиетінен Эйлер-Дарбу теңдеуі

$$R(\xi,\eta;x,y) = (\eta-\xi)^{\beta+\beta'}(y-\xi)^{-\beta}F(\beta,\beta',1;\sigma_{\xi\eta})$$

мұндағы $\sigma_{\xi\eta} = [(x-\xi)(\eta-y)(y-\xi)]$, Эйлер –Дарбу операторының қасиетінен шығатыны, функциясы үшінu(x,y) $\in D$ и $C(x,y)(y-x)^{-\mu}u(x,y) \in C(0 \le x \le y \le 1)$(3) теңдеу [74] қатынасына пара-пар

$$u(x,y) = (1-x)^{-\beta}y^{-\beta'}F(\sigma_{01})u(0,1) -$$

$$-y^{-\beta}\int_y^1 [\eta u'(0,\eta) + \beta' u(0,\eta)\eta^{\beta+\beta'}F(\sigma_{0\eta})(\eta-x)^{-\beta}d\eta +$$

$$+(1-x)^{-\beta}\int_0^x [(1-\xi)u'(\xi,1) - \beta\mu(\xi,1)](1-\xi)^{\beta-\beta'-1}F(\sigma_{\xi 1})(y-\xi)^{-\beta'}d\xi -$$

$$-\gamma\int_0^x (\gamma-\xi)^{-\beta'}d\xi \int_y^1 (\eta-\xi)^{\beta+\beta'-\mu}(\eta-x)^{-\beta'}C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)F(\sigma_{\xi\eta})d\eta,$$

$$F(z) = F(\beta,\beta',1;z) \quad (4.5)$$

(4.3)теңдеудің шешімін γ параметрі бойынша қатар түрінде көрсетсек

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n u_n(x,y) \quad (4.6)$$

және (3) теңдеуге және (4) шекаралық шарттарға қоямыз.Сонымен, γ бірдей дәрежелі мүшелерін біріктіріп, $u_n(x,y)$ және C(x, y) үшін теорема шартын ескеріп, Гурс есебінің келесі бөлімін аламыз:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} - \frac{\beta}{y-x}\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \quad (4.7)$$

$$u_0(0,y) = \varphi_0(y),\ \ u_0(x,1) = \Psi_0(x), \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y} - \frac{\beta}{y-x}\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{C(x,y)}{(y-x)^{\mu}}u_0 = 0 \quad (4.9)$$

$$u_1(0,y) = \varphi_1(y),\ \ u_1(x,1) = \Psi_1(x), \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y} - \frac{\beta}{y-x}\frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{C(x,y)}{(y-x)^{\mu}}u_{n-1} = 0 \quad (4.11)$$

$$u_n(0,y) = 0, u_n(x,1) = 0, \quad n = 2,3 \ldots\ldots \quad (4.12)$$

Гурс есебінің шешімі сипаттамалық айнымалыларда келесі формула арқылы беріледі:

$$u_0(x,y) = \Psi_0(x) - \int_y^1 \varphi_0'(\eta)\eta^\beta(\eta-x)^{-\beta}d\eta =$$

$$\Psi_0(x) - (y-x)^{1-\beta}\int_0^{(1-y)/(1-x)}\varphi_0'(\eta)\eta^\beta(1-t)^{\beta-2}dt \qquad (4.13)$$

$$u_1(\xi,\eta)d\eta = \Psi_1(x) -$$

$$-\int_y^1 \varphi_0'(\eta)\eta^\beta(\eta-x)^{-\beta}d\eta - \int_0^x d\xi\int_0^x(\eta-\xi)^{\beta-\mu}(\eta-x)^{-\beta}C(\xi,\eta)\times$$

$$\times u_0(\xi,\eta)d\eta = \Psi_1(x) - (y-x)^{1-\beta}\times$$

$$\times\int_0^{(1-y)/(1-x)}\left[\varphi_0'(\eta)\eta^\beta + \int_0^x(\eta-\xi)^{\beta-\mu}C(\xi,\eta)d\xi\right](1-t)^{\beta-2}dt(4.14)$$

$$u_n(x,y) = \int_0^x d\xi\int_y^1(\eta-\xi)^{\beta-\mu}(\eta-x)^{\beta-\mu}C(\xi,\eta)u_{n-1}(\xi,\eta)d\eta =$$

$$= (y-x)^{1-\beta}\int_0^{1-y)/(1-x)}(1-t)^{\beta-2}dt\times$$

$$\times\int_0^x(\eta-\xi)^{\beta-\mu}C(\xi,\eta)u_{n-1}(\xi,\eta)d\xi, n = 2,3\ ..., \qquad (4.15)$$

мұндағы$\eta = (y-xt)/(1-t)$ (4.13)-(4.15) өрнегінен шығатыны, u(x,y) $\in B$болғанда, сонда тек сонда ғана,

$$x^\beta\varphi_1'(x) + \int_0^x(x-\xi)^{\beta-\mu}C(\xi,x)u_0(\xi,x)d\xi = 0 \qquad (4.16)$$

болады, C(x,y) байланысты қортындыласақ,(4.1) теңдеудің C(x,y) коэффициентін қалпына келтіру есебі Вольтеррдің үшінші текті интегралдық теңдеуіне пара-пар

$$\theta(\mathrm{x})\omega(x) + \lambda\int_0^x \mathrm{u}_0(\xi,x)\omega(\xi) - (x-\xi)^{\beta-\mu}d\xi = -x^\beta\varphi_1'(x) \qquad (4.17)$$

$$\theta(\mathrm{x}) = \int_0^x(x-\xi)^{\beta-\mu}[\Psi_0(\xi) - \int_\xi^1\varphi_0'(\eta)\eta^\beta(\eta-\xi)^\beta(\eta-\beta)^{-\beta}d\eta]d\xi \qquad (4.18)$$

Бірінші бөлімдегі(I),(II) формулалар,(4.13) және [5]гипергеометриялықфункция үшін белгілі формулаларды пайдаланып,

$$F(a,b,c;z) = F(b,a,c;z) \tag{4.19}$$

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt, \ \ Rec > Reb \tag{4.20}$$

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-a}F(a,c-b,c;\frac{z}{z-1}, \arg(1-z)| < \pi \tag{4.21}$$

аламыз. Ал, $\theta(x)$ функциясы үшін төмендегі көрсетілім орынды

$$\theta(x) = x^{2-\mu}[x^{\mu-2}\int_0^x u_0(\xi,x)(x-\xi)^{\beta-\mu}d\xi] = x^{2-\mu}g(x) \tag{4.22}$$

мұндағы g(x)- $0 \leq x \leq 1$ кезіндегі үзіліссіз функция (4.17) теңдеуін (4.22) пайдалана отырып келесі түрге әкелеміз

$$x^{2-\mu}g(x)\omega(x) + \lambda\int_0^x u_0(t,x)(x-t)^{\beta-\mu}\omega(t)dt = x^{\beta}\varphi_1'(x) \tag{4.23}$$

α, ρ, m қатысты барлық шарттар орындалатын болса, онда тұрақты сұлба бойынша, n натурал санының бар екендігін көрсетуге болады, яғни,n-ші дәрежелі оператор

$$A\Psi(x) = \int_0^x k(x,t)t^{\mu-2}(x-t)^{\beta-\mu}\Psi(t)dt, k(x,t) = u_0(t,x)/g(t),$$

үзіліссіз $\bar{J}$ функциясында бейнеленетін кеңістік қысылған.
Енді

$$u_1(x,y) = \Psi(x) - \gamma\int_y^1 \{\varphi_1'(\eta)\eta^{\beta} + \int_0^x (\eta-\xi)^{\beta-\mu}C(\xi,\eta)u_0(\xi,\eta)d\xi\}(\eta-x)^{-\beta}d\eta$$

формуласымен анықталатын u(x,y) функциясының B класында жататындығын тексеру қиын.

ҚОРЫТЫНДЫ

Газ динамикасында, беттің шексіз аз иілу теориясында, айнымалы белгінің қисық сызығымен болатын қабықшалар теориясында, массалық жылуалмасу есептерінде кездесетін туынды дифференциалдық теңдеулер және аралас типті теңдеулер үшін жылу өткізгіштік феноменологиялық теориясына қарағанда жылу алмасудың және масса тасымалының соңғы жылдамдығы болжанып отыр. Кері есептер алдын ала берілген функционалдық кеңістікке жататын шектік, бастапқы немесе аралас есептердің шешімін табу барысында өздігінен пайда болды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Елдесбаев Т.Ж. Одномерные обратные задачи для вырождающихся эволюционных уравнений и уравнений смешанного типа. – Алматы: «ҒЫЛЫМ», 2003-209с.

2 Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.:Изд-во МГУ, 1999

3 Дарбу (Darboux G.)Lecons sur la theoregenerale des surfaces et les applications geometrieques du calculinfinimal. – Paris. – 1889

4 Нахушев А.М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интерrгральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференциальные уравнения. – 1974, т.10. №1, стр.100-111

5 Лебедев Н.Н. Специальные функции и их применения. – М.:Физматгиз. – 1963. – 380с.

6 Харди Г., Литтлвуд И. (Hardy G., Littlewood Y.) Some properties of fractional integrals // J. Math. Zeitsehz. – 1928,27. J64. p. 565-606

7 Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966 – 672с.

8 Елдесбаев Т. Об одной обратной задаче для уравнения Эйлера – Дарбу – Пуассона // Дифферциальные уравнения, 1975, т.II, №1, стр.47-59

9 Искендеров А. Д. Об обратных краевых задачах с неизвестными коэффициентами для некоторых квазилинейных уравнений // ДАН СССР,1968. т. 178, №5, стр.999-1003

10 Бицадзе А. В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. // Некоторые проблемы математики и механики. – Л.: Наука, 1970, стр.112-119

11 Бицадзе А. В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, - М.:Наука, 1972,стр.47 – 52